



CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA

- Suceava, 30 mai 2009 -

CLASA a XI-a

1. Să se rezolve ecuația: $a^x + b^x = 2 \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right)^x$, unde $a, b \in (0, \infty)$.
2. Să se arate că, dacă $A \in M_3(\mathbb{R})$, dacă $A^3 = I_3$ și dacă $A = A'$, unde A' este transpusa lui A , atunci $A = I_3$.
3. Considerăm funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}-1, \frac{\pi}{2}+1\right]$, definită de $f(x) = x + \sin x$.
Notăm cu $x(\lambda)$ soluția unică a ecuației $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}-1, \frac{\pi}{2}+1\right]$. Să se calculeze
limitele $l_1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x(\lambda)}{\lambda}$ și $l_2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x(\lambda) - l_1 \cdot \lambda}{\lambda^3}$.
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care satisface $f(0) \neq 0$ și care este derivabilă pe \mathbb{R} , cu derivata nenulă. Să se arate că există un punct $M_0(x_0, f(x_0))$ pe graficul funcției f , astfel încât dreapta ce unește M cu originea sistemului de coordonate este perpendiculară pe dreapta tangentă la grafic în punctul M .

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.